

L'IMPORTANZA DELLE NON LINEARITÀ NELL'INGEGNERIA DELL'ACQUA

Michele Fanelli

Dr. Ing. Prof. Già Direttore del Centro Ricerca Idraulica e Strutturale (CRIS)
dell'ENEL SpA, ora in pensione. Milano (Italia).

SOMMARIO: Si delineano le problematiche poste dalla non linearità della maggior parte dei sistemi di interesse ingegneristico, introducendo i concetti fondamentali delle metodologie appropriate allo studio del comportamento dinamico di tali sistemi. Si pone in rilievo come in svariati campi applicativi sia da ritenere necessario un aggiornamento critico in tal senso del bagaglio culturale e delle procedure applicative dell'Ingegneria in generale, e di quella dell'Acqua in particolare.

RESUMEN: En este artículo se esboza la problemática de la no linealidad de la mayor parte de sistemas de interés ingenieril, introduciendo los conceptos fundamentales de la metodología apropiada al comportamiento dinámico de estos sistemas. Se pone de relieve como en varios campos de aplicación se ha de considerar un acercamiento crítico en el sentido del bagaje cultural y de los procedimientos de aplicación a la ingeniería en general, y de aquella que concierne al Agua en particular.

GENERALITÀ E PREMESSE

Nelle scuole di Ingegneria sino ad oggi si è fornita all'allievo una metodologia di modellazione matematica che privilegia la trattazione di problemi riconducibili a forma lineare; si è inoltre (ma i due aspetti, come vedremo, sono strettamente collegati) instillata una mentalità "meccanicistica" e deterministica in senso stretto. Questa mentalità e questa metodologia hanno fortemente improntato non solo l'impostazione teorica, ma la stessa pratica sperimentale e persino la normativa.

E ciò malgrado quasi tutti i sistemi fisici con cui l'ingegnere - in particolare l'ingegnere idraulico - è chiamato a confrontarsi nella professione siano più o meno non lineari, e le azioni e le proprietà fisiche in gioco siano spesso grandezze riconducibili a distribuzioni stocastiche.

Da qualche tempo, tuttavia, l'ingegnere viene sempre più frequentemente sollecitato ad usare modelli matematici non lineari (si tratti ad es. di modellare strutture con

grandi spostamenti od i cui materiali siano sollecitati oltre il limite elastico, ovvero di integrare le equazioni di Navier-Stokes per rappresentare moti turbolenti di fluidi reali), nonché ad introdurre nelle sue valutazioni considerazioni di natura probabilistica.

Problematiche di questo tipo sono però state affrontate sinora fondamentalmente con la stessa mentalità formale sul modello lineare, solo impiegando mezzi più potenti, come il calcolo numerico su elaboratori elettronici, che *apparentemente* permettono di superare le difficoltà. Ma presto sono apparse alcune contraddizioni di fondo.

Un retaggio assai critico della mentalità lineare è in particolare il principio di continuità (che potremmo meglio chiamare di contiguità, o di convessità), per cui due sistemi dinamici identici, se partono con condizioni iniziali ed al contorno che differiscano di quantità contenute in un intervallo arbitrariamente piccolo, continueranno a trovarsi, in ogni istante della loro evoluzione successiva, in stati la cui prossimità (beninteso riferendosi a stati sincroni delle diverse "time histories") resta limitata quanto si voglia.

Las figuras que se presentan han sido delineadas por **Francisco García Mares**.

Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo. En el caso de ser aceptadas, las discusiones serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores en el primer número de la revista que aparezca una vez transcurrido el plazo indicado.

Come conseguenza pragmaticamente più utile - se ciò fosse sempre vero per i sistemi reali - ne discenderebbe che, per esplorare il comportamento di un sistema entro una certa gamma di variabilità dei suoi parametri di controllo (nel seguito PdC), basterebbe determinarne il comportamento per i valori estremi del campo di variazione dei PdC, poichè tutti i comportamenti sotto esame si troverebbero all'interno del poliedro pluridimensionale definito dall'involuppo dei comportamenti estremi (Figura 1).

[Notiamo qui di passaggio - l'argomento sarà ripreso più avanti - che si introducono così, in forma embrionale, considerazioni di tipo *topologico* sulle traiettorie di evoluzione del sistema in un certo *spazio di rappresentazione*, che però, se scelto con criteri tradizionali o intuitivi, non è detto sia il più opportuno ai fini della caratterizzazione del comportamento dinamico del sistema].

Purtroppo il principio di continuità può non essere più applicabile nel caso di sistemi fortemente non lineari. Del resto, gli utenti più avvertiti dei codici di calcolo non lineari la cui creazione ed uso vanno sempre più estendendosi ne lamentano da tempo la mancanza di unicità delle soluzioni, nonché l'estrema sensibilità alle variazioni delle condizioni iniziali (S.C.I.), alle variazioni dei PdC, alla storia passata del sistema rappresentato. Vedremo che questi aspetti vengono precisati dalla teoria dei sistemi non lineari in forma forse ancora più inquietante per l'ingegnere.

Inoltre, nel caso di azioni o proprietà di tipo stocastico si possono ottenere risultati concettualmente chiari ed attendibili - evitando di ricorrere a costose e lunghe simulazioni parametriche di numerose "time histories" - solo per sistemi lineari. E' solo in tal caso, infatti, che i parametri statistici della risposta del sistema si possono ricavare in maniera semplice da quelli (supposti noti) della variabilità stocastica delle azioni e delle proprietà del sistema. Nel caso dei sistemi non lineari (che sono poi la stragrande maggioranza dei sistemi fisici) ciò non è più conseguibile se non tramite approssimazioni (v. procedure FORM e SORM dei metodi affidabilistici). Ed ancora: adottando nel campo dei fenomeni non lineari i concetti usualmente ammessi nel campo lineare (distribuzione normale ecc.), si possono introdurre errori di principio, come appare dallo studio delle proprietà statistiche degli attrattori dinamici (v. oltre).

Un progresso metodologico e, prima ancora, di impostazione concettuale nella trattazione dei fenomeni non lineari appare particolarmente auspicabile per l'ingegneria idraulica, dove tematiche di vitale interesse coinvolgono inevitabilmente fenomeni fisici

intrinsecamente non lineari. Basti ricordare da un lato le conseguenze della **turbolenza** sul moto dei fluidi nelle installazioni industriali, e dall'altro la necessità di caratterizzare il comportamento delle opere idrauliche di ingegneria civile - prime tra tutte le dighe - a fronte di **eventi sismici estremi**, che portano inevitabilmente le strutture in questione nettamente al di là del campo elastico.

L'indirizzo attuale, consistente, come richiamato sopra, nell'estensione dei metodi di analisi numerica introducendovi termini correttivi rappresentativi degli effetti non lineari ed integrando passo-passo nel tempo con faticose e sostanzialmente inefficienti procedure iterative, appare poco soddisfacente per vari motivi, che cercheremo di esplicitare in seguito, ed inoltre sembra avviato su una pericolosa china di sempre crescente complicazione formale e numerica, che lascia temere - nonostante i formidabili progressi delle potenze di calcolo - possibili situazioni di impasse futura, rendendo tra l'altro sempre più ardua una interpretazione dei risultati in termini sintetici (fine ultimo di ogni valutazione ingegneristica).

Occorre d'altra parte riconoscere francamente che la metodologia razionale di analisi dei sistemi non lineari, se è soddisfacentemente sviluppata per i sistemi a uno, o poco più di uno, gradi di libertà, si trova di fronte a difficoltà per ora praticamente inestricabili per i sistemi a molti gradi di libertà, quali sono praticamente tutti i sistemi di interesse ingegneristico (a meno che con artifici più o meno leciti si riesca a ridurre il numero di gradi di libertà del modello senza inficiare l'attendibilità dei risultati).

La sensazione di chi si è confrontato poco o tanto con queste problematiche è che sia prossimo - o comunque necessario - un punto di svolta sia nella formazione e nella mentalità degli ingegneri, sia nei metodi della dinamica non lineare, con l'obiettivo di trovare un punto di convergenza e di sintesi (superando anche non irascibili barriere di linguaggio specialistico) che consenta un decisivo progresso nei metodi di base e nelle procedure più sfrecciamente applicative.

Per non restare troppo nel vago, cercheremo nel seguito di esemplificare le considerazioni in oggetto con situazioni e risultati di effettivo interesse; ma prima di poter fare ciò dovremo, sia pur in forma estremamente incompleta e succinta, introdurre la terminologia e gli indispensabili "ferri del mestiere" della dinamica non lineare, non necessariamente familiari a tutti i lettori di queste note.

**GLI STRUMENTI E IL LINGUAGGIO DI BASE:
LA RAPPRESENTAZIONE DELL'EVOLUZIONE
DINAMICA DI UN SISTEMA AD UN GRADO DI
LIBERTÀ (GDL) NELLO SPAZIO DELLE FASI.
POSSIBILITÀ DI RISPOSTA NON UNICA;
COMPORTAMENTI CAOTICI; LIMITI DI
PREVEDIBILITÀ DELL'EVOLUZIONE
DINAMICA**

Come la critica epistemologica recente ha riconosciuto, non tutte le domande o i metodi di investigazione sui fenomeni fisici sono "lecite" (hanno cioè senso o ammettono risposta univoca) indipendentemente dalla natura del sistema.

Per riuscire a formulare domande corrette e sensate sul comportamento di un modello di sistema dinamico, in un contesto che sia più ampio e generale di quello dei sistemi lineari, conviene adottare uno spazio rappresentativo (familiare sia agli studiosi di Meccanica Analitica che a quelli di Meccanica Statistica) diverso da quello ordinario dello spazio-tempo.

In particolare, per un sistema ad n gradi di libertà dovremmo in linea di principio ricorrere ad uno spazio di rappresentazione astratto a $2n$ dimensioni ("spazio delle fasi"), di cui n rappresentano le coordinate associabili ad ogni grado di libertà, e le altre n i "momenti" (quantità di moto) associabili alle rispettive velocità (è poi talvolta necessario definire uno "spazio delle fasi completo" a $2n + 1$ dimensioni includendo il tempo). Nel caso di un sistema di riferimento inerziale cartesiano e di un sistema fisico di n punti materiali di massa m_j ($1 \leq j \leq n$) avremo ad es.:

$$\left. \begin{aligned} q_j &= x_j = \text{coordinate} \\ p_j &= m_j \cdot v_j = m_j \cdot \frac{dx_j}{dt} = \text{momenti} \end{aligned} \right\} = 2n \quad (1)$$

coordinate dell'unico punto rappresentativo dello stato del sistema nello spazio delle fasi (sdf).

Naturalmente tali coordinate di fase non sono indipendenti tra loro, poichè sono legate sia dalle relazioni differenziali (1) sia dalle equazioni che esprimono la dinamica del sistema.

L'introduzione di tale modo di rappresentare l'evoluzione nel tempo [poichè $q_j = q_j(t)$, $p_j = p_j(t)$] del sistema solleva a prima vista numerosi interrogativi. Tra questi uno appare particolarmente evidente: per rappresentare un "continuo esteso" (sistema a parametri distribuiti anzichè concentrati) sarebbe necessario uno spazio $2n$ -dimensionale con n estremamente elevato (nel caso di una discretizzazione fine) se non addirittura tendente all'infinito. Come sperare dunque di utilizzare praticamente uno strumento di questo tipo? Qui

soccorrono talvolta, sia la riduzione dell'ordine dimensionale del sistema tramite artifici vari (ove possibile), sia una notevole proprietà della dinamica del punto rappresentativo nello spazio delle fasi, che dobbiamo limitarci - per non gonfiare oltre misura l'esposizione - ad enunciare:

a) per sistemi conservativi (cioè senza dissipazioni energetiche) una distribuzione continua di stati iniziali, che occupi un certo "volume" V_0 dello sdf al tempo $t = 0$, si sposterà (ed eventualmente deformerà) nel tempo nello sdf continuando però ad occupare sempre lo stesso volume: $V(t) = V_0$;

b) per sistemi dissipativi (cioè con perdite di energia dovute ad attriti, viscosità od altro tipo di resistenze passive) una distribuzione continua di stati iniziali, che occupi inizialmente un volume V_0 nello sdf, si sposterà e deformerà nel tempo occupando un volume progressivamente sempre più contratto:

$$V(t_2) < V(t_1) \text{ se } t_2 > t_1$$

Poichè praticamente tutti i sistemi di interesse ingegneristico sono dissipativi, è allora intuibile che, per la proprietà b), anche sistemi molto complessi possano essere talvolta approssimati, almeno a lungo termine, da modelli a pochi gradi di libertà, il che può in casi particolari consentire di utilizzare praticamente lo strumento dello sdf. Nel seguito ci riferiremo addirittura, per semplicità, ad un oscillatore ad un solo grado di libertà (ad es. la sua coordinata di posizione x).

Lo sdf relativo al nostro oscillatore semplice avrà due sole dimensioni (oltre al tempo):

$$\begin{aligned} q &= x \\ p &= mv = m \cdot \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Assumiamo, senza per questo perderé di generalità, $m =$

1, e quindi $p = \frac{dx}{dt}$. Il comportamento del sistema potrà essere seguito osservando l'evoluzione nel tempo di un punto P di ascissa $q(t)$ e di ordinata $p(t)$ nel piano delle fasi cartesiano (q, p) :

$$\left. \begin{aligned} q(t) &= x(t) \\ p(t) &= \frac{dx}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Ricordiamo che, se il sistema ammette una funzione Hamiltoniana $H(q, p)$, come accade ad es. per i sistemi conservativi, nei quali $H =$ energia totale $= U + T$ con $U =$ energia potenziale, $T =$ energia cinetica, le

equazioni di evoluzione dinamica sono espresse sinteticamente da:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Se, per familiarizzarci con il formalismo, prendiamo come primo esempio le **vibrazioni libere** del classico oscillatore lineare con pulsazione propria ω_0 , smorzamento nullo e massa unitaria, avremo:

$$T = \frac{p^2}{2}, \quad U = \omega_0^2 \cdot \frac{q^2}{2}, \quad H = T + U; \quad (4)$$

dalle (3) abbiamo quindi per l'evoluzione della traiettoria del punto rappresentativo nello spazio delle fasi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega_0^2 \cdot q \end{aligned} \right\}$$

da completare con le condizioni iniziali:

$$\left. \begin{aligned} q(t=0) &= q_0 \\ p(t=0) &= p_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Eliminando p tra le (5) si ottiene:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\omega_0^2 \cdot q \quad (6)$$

da cui

$$q = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \quad (7)$$

e quindi

$$p = \frac{dq}{dt} = \omega_0 \cdot [A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) - B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)] \quad (8)$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha:

$$\left. \begin{aligned} B &= q_0 \\ \omega_0 \cdot A &= p_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ritroviamo dunque, con un formalismo diverso, risultati ben noti. Nel caso di **vibrazioni forzate**, e di smorzamento ad es. viscoso non nullo, ritroveremmo analogamente la soluzione classica somma di un integrale particolare (funzione armonica di $\omega_f \cdot t$, con ω_f = pulsazione della forzante) caratterizzato da un certo guadagno e da una certa fase rispetto alla forzante, che rappresenta la soluzione di regime, e di una "funzione complementare" dipendente dalle condizioni iniziali, di tipo armonico smorzato con pulsazione prossima ad ω_0 , che rappresenta il transitorio iniziale.

Se riformuliamo il problema in termini adimensionali, ponendo:

x_0 = lunghezza di riferimento,

$$\eta = \frac{\omega_f}{\omega_0},$$

ζ = fattore di smorzamento (in unità di smorzamento critico),

$\left. \begin{aligned} X_r \\ F_r \end{aligned} \right\}$ = ampiezze rispettivamente della

risposta a regime e della forzante,

$\tau = \omega_f \cdot t$ = tempo adimensionale,

$$f_r = \frac{F_r}{x_0 \cdot \omega_0^2} = \text{ampiezza adimensionale}$$

della forzante,

$$Y(\tau) = \frac{x}{x_0}, \quad Y(\tau) = \frac{dY}{d\tau} \quad (e \quad \ddot{Y}(\tau) = \frac{d^2 Y}{d\tau^2}),$$

l'equazione adimensionalizzata del moto dell'oscillatore assume in notazione complessa la forma seguente:

$$\ddot{Y} + \frac{2\zeta}{\eta} \cdot \dot{Y} + \frac{Y}{\eta^2} = \frac{f_r \cdot \exp(i \cdot \tau)}{\eta^2} \quad (10)$$

ponendo inoltre: $K = \frac{Y_r}{f_r} = \frac{X_r}{F_r} \cdot \omega_0^2$, la (10) fornisce per

la soluzione di regime:

$$K = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 \cdot \eta^2 \cdot \zeta^2}} = K(\eta)$$

l'integrale particolare della (10) risultando per esteso, sempre in notazione complessa:

$$Y(\tau) = K \cdot f_r \cdot \exp(i \cdot \tau - i \cdot \arctg \frac{2\eta \cdot \zeta}{1-\eta^2})$$

$$\dot{Y}(\tau) = i \cdot Y(\tau) \quad (11)$$

Nel piano delle fasi adimensionali (Y , \dot{Y}) la traiettoria a regime del punto rappresentativo si riduce pertanto, per il nostro oscillatore lineare, ad una circonferenza di raggio $K \cdot f_r$ percorsa con velocità angolare unitaria. L'ampiezza Y_r della risposta adimensionale a regime, a parte il fattore $f_r = \frac{F_r}{x_0 \cdot \omega_0^2}$, è data da $K(\eta)$, v. (11) che coincide

con la ben nota "curva di risonanza" in funzione del "parametro di frequenza" η (v. Figura 2 e 2b); il ritardo di fase della risposta a regime rispetto alla forzante risulta pari all'angolo $\arctg \frac{2\eta \cdot \zeta}{1-\eta^2}$.

Poiché la traiettoria nel pdf è un cerchio percorso a velocità costante, il considerare tutti i punti della traiettoria stessa costituirebbe una non utile ridondanza di informazione.

Se immaginiamo quindi di rappresentare (metodo delle "sezioni stroboscopiche" di Poincaré), anziché tutta l'evoluzione nel piano (Y , \dot{Y}) di $Y(\tau)$, solo i punti di fase infera rispetto alla forzante (cioè i punti rappresentativi ai tempi $\tau = k \cdot 2\pi$ con $k = 0, 1, 2, \dots$), vediamo che a regime, per η fisso, otterremo sempre lo stesso punto

sull'asse delle ordinate $(0, f_r)$ per la forzante e sempre lo stesso punto A $[-2 \cdot \eta \cdot \zeta K^2 \cdot f_r, (1 - \eta^2) \cdot K^2 \cdot f_r]$ per la risposta. Questo punto unico è l'**attrattore** della risposta dell'oscillatore lineare: qualunque sia la condizione iniziale, una volta esaurito il transitorio si otterrà sempre lo stesso punto A; v. ancora Figura 2b.

Ben diverso può essere il comportamento di un **oscillatore non lineare**. Prendiamo ad es. la semplice equazione non lineare:

$$\ddot{Y} + \frac{2\zeta}{\eta} \dot{Y} + \frac{Y}{\eta^2 \cdot (1 + Y)} = \frac{f_r \cdot \sin \tau}{\eta^2} \quad (12)$$

che differisce dalla (10) solo per la presenza del denominatore $(1 + Y)$ nell'ultimo termine a primo membro, e tende alla (10) per $Y \ll 1$; vedremo che tale equazione è di interesse per l'ingegnere idraulico (Figura 3). Ovviamente deve sempre essere $Y > -1$ per avere soluzioni fisicamente accettabili.

Notiamo anzitutto che la (12) non è integrabile in forma chiusa, se non nel caso particolarissimo di vibrazioni libere ($f_r = 0$) e non smorzate ($\zeta = 0$), caso in cui la soluzione nel piano delle fasi è la seguente:

$$\frac{\dot{Y}^2 - \dot{Y}_0^2}{2} = 1n \frac{1 + Y}{1 + Y_0} - (Y - Y_0)$$

dove compaiono esplicitamente le condizioni iniziali:

$$\left. \begin{aligned} Y(\tau = 0) &= Y_0 \\ \dot{Y}(\tau = 0) &= \dot{Y}_0 \end{aligned} \right\}$$

La forma del ciclo stabile corrispondente è illustrata in Figura 4; se Y_0 o \dot{Y}_0 sono sufficientemente grandi, essa è fortemente distorta rispetto alla forma (sinusoidale nel dominio del tempo, circolare nel piano delle fasi) del caso lineare.

Per il caso, di maggior interesse tecnico, di oscillazioni forzate sotto forzante di tipo sinusoidale e con smorzamento piccolo ma non nullo, si sono eseguite (Fanelli e Sello, 1992) numerose integrazioni numeriche della (12) facendo variare sia il parametro di frequenza della forzante η che le condizioni iniziali (Y_0, \dot{Y}_0) ; il parametro di smorzamento ζ fu tenuto fisso al valore $\zeta = 0,1$. Ricorrendo alla già citata tecnica di rappresentazione con sezioni stroboscopiche, nonché al tracciamento delle traiettorie complete nei casi di maggior interesse, si sono riscontrati per le risposte a

regime (una volta esauriti i transitori iniziali) i comportamenti qui di seguito sunteggiati.

A) per $\eta < 1$:

Per valori bassissimi di η (dell'ordine di qualche centesimo) la risposta a regime tende a presentare oscillazioni secondarie (superarmoniche) di frequenza praticamente coincidente con la frequenza naturale del sistema (che in termini adimensionali vale $\frac{1}{\eta}$), che si sovrappongono al ciclo principale (Figura 5).

Riportando le ampiezze massime picco-picco a regime $Y_{pp} = Y_{max} - Y_{min}$ funzione di η , si notano inoltre (Figura 6), alcune "risonanze irregolari", ossia picchi locali della curva di risposta in frequenza (A, B in Figura 6), che sono totalmente assenti nella corrispondente curva di risposta in frequenza del sistema lineare analogo.

[Notare che la risposta "statica", ossia per $\eta \rightarrow 0$, risulterebbe, dalla (12), $Y(\tau) = \frac{f_r \cdot \sin \tau}{1 - f_r \cdot \sin \tau}$ (Figura 7):

mentre per l'oscillatore lineare sia le vibrazioni libere non smorzate che quelle forzate a regime descrivono nel piano delle fasi un ciclo perfettamente circolare, per quello non lineare non solo i cicli corrispondenti sono fortemente distorti, per vibrazioni di grande ampiezza, rispetto alla forma circolare, ma la forma del ciclo per le vibrazioni libere è nettamente diversa da quella del ciclo per le vibrazioni forzate)].

B) per $\eta \approx 1$ (attorno alla risonanza):

Avvicinandosi al valore $\eta = 1$ "dal di sotto" si nota, per f_r superiore ad una certa soglia, un altro fenomeno peculiare: *la soluzione di regime non è più unica* (Figura 6 e 8). La Figura 8 mostra in particolare due cicli stabili di risposta a regime per $\eta = 0,8$, $f_r = 0,5$, dei quali si ottiene l'uno o l'altro a seconda delle condizioni iniziali.

Nella terminologia sopra introdotta abbiamo quindi in questo caso due distinti "**attrattori**" puntuali P_1 e P_2 , ognuno dei quali avrà un suo proprio "**bacino di attrazione**" rispettivamente le regioni R_1 ed R_2 del piano delle fasi, tali che se il punto iniziale (Y_0, \dot{Y}_0) è contenuto in R_1 (o in R_2), il punto della sezione stroboscopica convergerà, a transitorio esaurito, su P_1 , (o su P_2). Vedremo più oltre che non sempre la struttura degli attrattori (e dei bacini di attrazione) nello sdf è semplice, nè questi enti sono sempre riconducibili a numero di dimensioni spaziali intero. Il fatto che attorno a $\eta = 0,8$ vi sia un intervallo $\eta' \rightarrow \eta''$ in cui possono aversi, per la stessa eccitazione, risposte distinte (ed

in particolare di ampiezza diversa) deriva direttamente dalla non linearità dell'equazione (12) e dà alla curva di risposta in frequenza $Y_{pp}(\eta)$ del nostro oscillatore non lineare la caratteristica forma a campana "strapiombante all'indietro" che appare in Figura 6: è noto che questa forma della curva di risposta può dar luogo a fenomeni di brusca transizione di ampiezza della risposta ("isteresi dinamica"), in particolare se la frequenza propria dell'oscillatore (ω_0) non è perfettamente stabile (v. Figura 9). Inoltre la forma ripiegata all'indietro del picco di risonanza (tanto più accentuata quanto maggiore è l'ampiezza f_r della forzante) evidenzia nelle frequenze per le quali si ha la massima risposta un effetto di "softening" (progressivo decremento) per ampiezze crescenti, mentre, come noto, per il corrispondente oscillatore lineare il posizionamento in frequenza del picco è indipendente dall'ampiezza di eccitazione (il picco si verifica sempre per $\sqrt{\eta=1-2\cdot\zeta^2}$).

C) $\eta > 1$ (oltre la risonanza):

Tra $\eta \cong 1$ ed $\eta \cong 2$ apparentemente la curva di risposta in frequenza del nostro oscillatore non lineare, per assegnati valori di f_r (e di ζ) decrece regolarmente a somiglianza di quella dell'oscillatore lineare (v. Figura 6). Tuttavia, nella regione compresa grosso modo tra $\eta \cong 1,7$ ed $\eta \cong 2,0$ è possibile, per valori di $f_r > 0,5$, mettere in evidenza, oltre al **regime normale o "sincrono"** della risposta a regime (1 ciclo con 1 max e 1 min per ogni ciclo della forzante), altri **regimi competitivi di tipo "subarmonico"** di ordine N (1 periodo di ripetizione ciclica della risposta, con in genere più di un max ed un min locali, occupa N cicli della forzante: in questa terminologia il regime "sincrono" si può anche definire come "subarmonico di ordine 1"). Mentre l'attrattore del regime sincrono si riduce ad un punto, quello di un regime subarmonico di ordine N è costituito da un gruppo di N punti distinti nel pdf. Il verificarsi del regime sincrono o di un regime subarmonico "competitivo" (per la stessa eccitazione) dipenderà, al solito, dal "bacino di attrazione" cui appartiene il punto (Y_0, \dot{Y}_0) che definisce le condizioni iniziali

Nel caso dell'oscillatore non lineare in esame osserviamo in particolare (Figura 10), facendo variare gradualmente il parametro di frequenza η nella regione indicata, una "biforcazione" per cui dal regime sincrono di risposta si passa ad un regime subarmonico di ordine due: il punto della sezione stroboscopica corrispondente al regime sincrono si sdoppia in due punti, dapprima vicinissimi e gradualmente sempre più lontani al crescere di η oltre il valore 1.7 e fino al valore 1.75 circa. Facendo crescere ulteriormente η i due punti

dell'attrattore subarmonico tornano ad avvicinarsi, fino a che per $\eta \cong 2$ essi confluiscono nuovamente in un solo punto di un nuovo attrattore sincrono ($N=1$). Beninteso il regime subarmonico con $N+2$ coesiste, per ogni valore di η all'interno dell'intervallo in esame, con un regime di tipo sincrono.

Da notare (Figura 11) che quando i due regimi sono nettamente distinti le relative ampiezze picco-picco sono molto diverse; nel caso in esame l'ampiezza del regime subarmonico ($N=2$) è assai maggiore (fino ad un rapporto superiore a 4) rispetto a quella del regime sincrono. **Si vede quindi come la conoscenza completa dei possibili regimi competitivi, e dei loro bacini di attrazione, sia della massima importanza dal punto di vista ingegneristico.** La determinazione dei bacini di attrazione richiede in generale estese e costose esplorazioni numeriche, ed i confini tra i bacini di attrazione possono essere estremamente frastagliati o, al limite, frallati.

Se lenassimo di interpretare un regime subarmonico, ad es. di ordine $N=2$, nei termini, a noi più familiari, di una scomposizione alla Fourier della forma d'onda distorta del ciclo di risposta, diremmo che esso contiene una "fondamentale" che ha periodo coincidente col doppio di quello della forzante, e grosso modo (nel nostro caso) identificabile con il periodo proprio dell'oscillatore. Si evidenzia così una differenza fondamentale con l'oscillatore lineare a un gdl, che a regime risponde sempre con la stessa frequenza della forzante e non contiene armoniche; si potrebbe dire, in termini non rigorosi ma espressivi, che il sistema non lineare ha più forte "personalità" e tenta - quando possibile - di esprimere il suo proprio "temperamento periodico" anche in presenza di forzanti a periodo diverso.

E' da sottolineare anche che questi comportamenti tipici dipendono dal superamento di soglie di ampiezza da parte della forzante: ad es. per evidenziare la subarmonica di ordine $N=2$ abbiamo dovuto aumentare f_r sino al valore 0.75 circa.

Per $\eta \cong 3$, analogamente, si sono evidenziati, oltre all'attrattore sincrono ($N=1$), attrattori alternativi corrispondenti a regimi subarmonici con $N=3$; e per $\eta \cong 4$, pur di prendere per f_r valori dell'ordine di 4 (effetto soglia), regimi competitivi sia con $N=1$ che con $N=4$. Chiaramente l'attrattore di una subarmonica con $N=3$ sarà costituito da un gruppo di 3 punti nel pdf; e quello di una subarmonica di ordine 4 da un gruppo di 4 punti (ad es. B,C,D,E in Figura 12); mentre l'attrattore del regime sincrono sarà un unico punto (A in Figura 12). Anche per queste subarmoniche di ordine superiore si verifica la possibilità, rilevante per le conseguenze

pratiche, di avere ampiezze di risposta picco-picco molto maggiori di quelle del regime sincrono.

Poichè le esplorazioni numeriche condotte non sono state sufficientemente esaustive, non si sono determinati i rispettivi bacini di attrazione nè l'esistenza di altri regimi competitivi (ad es. con $N=2$ nell'intervallo di η nel quale si sono trovate le subarmoniche con $N=3$, o con $N=2$ ed $N=3$ nell'intervallo in cui si sono evidenziate le subarmoniche con $N=4$); ma per analogia con quanto noto dalla letteratura specializzata a proposito di altri oscillatori non lineari è presumibile che questi attrattori alternativi coesistano effettivamente (ciascuno col suo bacino di attrazione nel pdf).

D) risposte di tipo "caotico" per particolari valori di $\eta > 1$:

Dagli studi sistematici compiuti su vari tipi di oscillatori non lineari è noto che, per particolari valori del parametro di ampiezza dell'eccitazione, si assiste, in un breve intervallo di valori del parametro di frequenza, a biforcazioni successive sempre più frequenti

$$\left(\frac{\Delta \eta_j}{\Delta \eta_{j+1}} \right) = 4.66920... = \text{"numero di Feigenbaum"},$$

talchè dalla presenza della sola risposta sincrona ($N=1$) si passa alla comparsa competitiva di subarmoniche prima di ordine $N=2$, poi di ordine $N=4$, indi $N=8$, $N=16$,...ed infine, per un particolare valore critico di η , ad un tipo di regime detto "caotico" nel quale la risposta perde ogni carattere di periodicità (un altro modo di vedere ciò è il considerare tale tipo di risposta come una subarmonica di ordine $N = \infty$; o, ancora, si può dire in termini intuitivi che il transitorio iniziale non termina mai). L'attrattore del regime caotico ("attrattore strano") è costituito ovviamente da infiniti punti, ed ha generalmente struttura frattale "autosimile". Ciò vuol dire che ogni sua parte, se ingrandita, rivela lo stesso tipo di distribuzione dei punti di sezione stroboscopica riscontrabile nell'attrattore preso nel suo insieme; tali punti non sono distribuiti a caso, ma compongono un insieme dotato di un tipo di "ordine" particolare, caratterizzato tra l'altro da una *dimensione geometrica frazionaria*. Il significato di quest'ultima proprietà, detto in breve, consiste in un inestricabile addensamento e mescolamento delle traiettorie nello spazio delle fasi "completo" (Y, \dot{Y}, τ) , talchè le traiettorie nel loro insieme, pur mantenendo misura nulla, costituiscono un ente "frattale" di dimensionalità geometrica intermedia tra quelle di una linea e di una superficie. Conseguenza di ciò è il manifestarsi accentuato della tendenza alla divergenza nel tempo (Figura 13) delle evoluzioni di

situazioni inizialmente vicine e quindi la perdita del "principio di contiguità" illustrato in Figura 1. In termini meno descrittivi e più quantitativi, traiettorie cui corrispondono, per un certo $\tau = 2 \cdot m_k \cdot \pi$ (m_k intero), punti arbitrariamente prossimi sull'attrattore esibiranno successivamente punti di sezione stroboscopica (sempre ovviamente appartenenti all'attrattore) la cui distanza crescerà in media esponenzialmente - con oscillazioni più o meno casuali - al crescere di m_k ; il che, in termini operativi, implica la pratica **impossibilità di previsioni a lunga scadenza** sull'evoluzione dinamica del sistema. L'esponente che misura la rapidità di divergenza al crescere di τ ("esponente di Liapunov") è una caratteristica rilevante del tipo di caos specifico.

Inoltre se ad un certo istante $\tau = 2 \cdot m_0 \cdot \pi$ (m_0 intero) identifichiamo un *insieme ordinato* di punti dell'attrattore (ad es. giacenti su una linea in un certo ordine mutuo), ad un tempo $\tau' = 2 \cdot (m_0 + m_1) \cdot \pi$ (m_1 intero) successivo le traiettorie originate dai punti di detto insieme produrranno punti di sezione stroboscopica giacenti ancora sull'attrattore, ma in un ordine di successione completamente perturbato: la linea che collega i nuovi punti nell'ordine iniziale sarà "irrimediabilmente" deformata e aggrovigliata. L'**analisi topologica** della complessa struttura dell'attrattore nello spazio completo delle fasi è rivelatrice delle proprietà dinamiche del sistema e del tipo di evoluzione temporale cui esso soggiace.

Occorre infatti sottolineare che questo apparente disordine non si può identificare con una distribuzione "casuale"; si tratta, invece, di un "caos deterministico", in quanto l'equazione di partenza è rigorosamente deterministica: se si parte dallo stesso punto nel pdf e si usano **esattamente** le stesse approssimazioni numeriche, si ripercorrerà necessariamente la stessa traiettoria. Ma poichè la definizione delle *condizioni iniziali di un sistema reale* rappresentate dall'equazione non lineare non sono mai definite con *precisione infinita*, il punto iniziale nello sdf si troverà per un dato sistema fisico in una *posizione non definita* all'interno di un piccolo rettangolo i cui lati rappresentano l'incertezza, *finita*, nella conoscenza di Y_0, \dot{Y}_0 ; la "reale" traiettoria successiva del sistema potrà perciò essere una qualunque delle traiettorie progressivamente divergenti che emanano dai diversi punti di detto rettangolo (Figura 13): dopo un tempo finito la posizione del punto nel pdf potrà trovarsi "ovunque" all'interno di una regione molto più grande del rettangolo iniziale. In questo senso va correttamente intesa la sopra enunciata **impossibilità pratica di previsioni a lungo termine** (se con ciò intendiamo previsioni "definite" nel senso del determinismo tradizionale).

Si noti, d'altra parte, che generalmente l'attrattore del regime caotico, pur nella sua struttura complessa ed estesa, occupa una *regione limitata* dello sdf; tale regione si può dunque in un certo senso riguardare (assieme agli attrattori degli eventuali regimi in competizione col regime caotico per gli stessi valori dei PdC) come l' "involuppo" nello sdf delle possibili risposte a regime del sistema. **Solo previsioni di questo tipo, o analoghe (ad es. stima del numero di cicli della forzante statisticamente necessari per portare il sistema ad ampiezze di risposta pericolose) sono lecite circa il futuro di un sistema che si trovi in condizioni tali da poter originare un regime caotico; si vede dunque che in tali casi la mentalità ed il modo di procedere dell'ingegnere dovranno subire un sostanziale riallineamento.**

Nel caso del sistema non lineare che abbiamo considerato sopra [eq.(12)] è stato ad es. identificato un regime caotico per i seguenti valori dei PdC e delle condizioni iniziali:

$$\left. \begin{array}{l} \eta \cong 2,40 \\ f_r \cong 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} Y_0 \cong 0,840 \\ Y_0 \cong 1,260 \end{array} \right\}$$

Un limitato campionamento del relativo attrattore strano è riportato in Figura 14. Si vede che l'ampiezza della risposta può variare entro limiti assai larghi; e di questo ogni valutazione di tipo tecnico dovrà necessariamente tener conto.

IMPLICAZIONI DELLA DINÁMICA NON LINEARE SULLE VALUTAZIONI INGEGNERISTICHE. STRUMENTI DI NUOVO TIPO PER L'ANALISI DELLE SERIE DI DATI Sperimentali.

Come si è in parte già anticipato, la possibilità di divergenza esponenziale delle traiettorie dinamiche nello sdf (sensibilità alle condizioni iniziali), di risposte multiple e "competitive" alla stessa eccitazione, di comportamenti caotici mettono in crisi l'ideale deterministico e meccanicistico dell'ingegnere "classico", retaggio culturale della Meccanica Newtoniana basato sul modello lineare: modello dotato di tante proprietà favorevoli, come l'unicità delle soluzioni, il principio di reciprocità, la sovrapponibilità degli effetti ecc.

Occorre invece piegarsi all'evidenza che i sistemi lineari, modello e termine di riferimento "istintivo" per tutti noi, costituiscono una classe privilegiata ma ristretta tra i sistemi fisici reali: essi si identificano infatti coi cosiddetti "sistemi integrabili" della Meccanica Analitica, per i quali una conoscenza delle leggi meccaniche e delle condizioni iniziali è sufficiente a determinare senza margini di incertezza tutta l'evoluzione futura: esempio insigne il "problema dei due corpi" in Meccanica Celeste.

Purtroppo la stragrande maggioranza dei sistemi fisici reali fa parte invece della classe dei "sistemi non integrabili" a causa di non linearità del tipo di quelle sommariamente trattate nel § precedente. Nella stessa Meccanica Celeste, tempio del determinismo per eccellenza, già il "problema dei tre corpi" - è a maggior ragione il problema dell'interazione gravitazionale di molti corpi - è stato dimostrato essere in generale non integrabile; si pensa oggi effettivamente, con qualche suffragio di osservazione, che anche su scala cosmologica siano riscontrabili instabilità a lungo termine e comportamenti caotici.

A maggior ragione ciò accade nei sistemi di interesse tecnico, ed in particolare per gli "oggetti" di cui si occupa l'ingegnere idraulico. Le familiari procedure di linearizzazione delle equazioni non lineari (ad es. delle resistenze idrauliche di tipo quadratico nei problemi di moto oscillante) si rivelano un artificio decisamente insufficiente - in linea generale - a rivelare tutta la gamma dei possibili comportamenti.

L'esempio di sistema non lineare che abbiamo esposto sopra con qualche dettaglio non è stato, del resto, scelto a caso. L'eq. (12) può essere infatti assunta, in prima approssimazione, a rappresentare la oscillazione nota come "*draft tube surge*" nel diffusore di una turbina Francis funzionante a carico parziale (v. Figura 3). L'aver mostrato, con l'analisi numerica di detta equazione, che si può sospettare la possibilità di risposte non uniche ed "irregolari" (subarmoniche o caotiche) ha immediate conseguenze sia sui metodi di approccio usati nelle ricerche teoriche sul fenomeno in questione (che come si sa è di grande interesse per i costruttori e gli esercenti di gruppi idroelettrici, essendo talvolta responsabile di intollerabili fluttuazioni di pressione, coppia e potenza nell'esercizio delle unità di generazione), sia sulla pianificazione delle campagne di misura e l'analisi dei dati sperimentali, sia infine sulla concezione ed attuazione di dispositivi di attenuazione delle oscillazioni nocive.

Per quanto attiene ai metodi di *analisi delle serie temporali di dati sperimentali*, ad es., la semplice analisi spettrale classica (alla Fourier) di serie di segnali in cui qualitativamente si riscontri la presenza sia di componenti grosso modo periodiche, sia di "rumore" (ossia di componenti irregolari a larga banda), può essere non sufficiente o addirittura fuorviante. A questo proposito conviene evidenziare che sono state messe a punto recentemente sofisticate procedure di trattamento digitale delle serie temporali le quali permettono di rivelare - con un certo grado di attendibilità - se nel fenomeno fisico che ha dato origine a quei dati siano inerenti delle non linearità, e addirittura di stimare il numero di gradi di libertà "efficaci" del sistema (cioè il numero delle variabili principali da cui dipende in massima parte la dinamica del sistema). Purtroppo limiti

di spazio ci impediscono di accennare qui, anche solo di sfuggita, ai fondamenti ed alle metodologie di dette procedure; basti dire comunque che esse sono state impiegate per l'analisi di serie sperimentali di misure di oscillazioni di pressione rilevante su impianti idroelettrici in presenza di "*draft tube surge*", ed hanno effettivamente rivelato consistenti indizi di non linearità, e consentito inoltre di stimare il numero di gdl del sistema in buon accordo con il modello teorico.

Convien anche notare che in presenza di comportamenti caotici una analisi del segnale rivelerà la presenza di una distribuzione spettrale "a larga banda" (proprio perchè per definizione la risposta caotica non è periodica), ma le relative caratteristiche statistiche saranno in genere differenti da quelle di una distribuzione puramente casuale: giova infatti ricordare che la distribuzione Gaussiana può essere fatta derivare dalla somma di numerosi effetti di piccola entità indipendenti l'uno dall'altro (non interagenti), dunque escludendo forti non linearità. Valutazioni tecniche (frequenza di superamento di determinate soglie ecc.) basate sulle proprietà della distribuzione normale, come si potrebbe essere indotti a fare seguendo abitudini tanto radicate da ingenerare comportamenti quasi istintivi, potrebbero dunque portare a risultati inattendibili. La presenza di contenuti frequenziali a larga banda deve perciò essere valutata di volta in volta con spirito critico e con strumenti diagnostici appropriati.

ULTERIORI CAMPI DI APPLICAZIONE E POSSIBILI SVILUPPI FUTURI. DIFFICOLTÀ DA SUPERARE

Un argomento applicativo di grande rilevanza sarà senza dubbio quello della **dinamica delle strutture**, in particolare la valutazione della sicurezza a fronte di **eventi sismici estremi**. Dato, infatti, che sarebbe antieconomico dimensionare una generica struttura per metterla in grado di resistere ai più violenti sismi prevedibili restando entro il campo elastico lineare, è certo che gli eventi in questione porteranno a superare il limite di linearità nelle parti più sollecitate dell'opera. Per l'ingegneria dell'acqua il problema tipico (con vaste implicazioni non solo tecniche, ma anche socio-economiche) è quello della **sicurezza sismica delle dighe**.

Attualmente il problema viene affrontato - a mio parere - con un errore "di prospettiva", cioè senza un'analisi critica preliminare del tipo di indagine che è consentito dalla natura del problema, ma, semplicisticamente, tentando di estendere in modo acritico le stesse procedure usabili per le analisi lineari. Ciò porta ad operare con integrazione passo-passo, nel dominio del tempo, di grandi sistemi di equazioni derivanti da discretizzazioni ad Elementi Finiti (E.F.) in cui le

proprietà non lineari del comportamento dei materiali vengono approssimate con linearizzazioni locali e la soluzione avanza di passo in passo temporale grazie a procedure iterative di predizione-correzione. Ciò produce (faticosamente e a caro prezzo) "una" soluzione, ma - in base a quanto abbiamo visto - occorre evitare l'errore di credere (come l'abito mentale formato sull'archetipo dei sistemi lineari induce troppo spesso a fare) che questa sia "la" soluzione. Se si riconosce questa difficoltà, il corretto "modus operandi" sarebbe allora quello di ricorrere a numerose ripetizioni dell'analisi, variando parametricamente le condizioni iniziali, le proprietà dei materiali, l'intensità e la "time history" delle azioni sismiche... Ma è una strada praticamente inagibile, poichè il costo delle valutazioni (e il tempo necessario a portarle a termine) raggiunge fatalmente livelli inaccettabili.

Inoltre il risultato delle simulazioni consiste in una descrizione di dettaglio, istante per istante, degli effetti locali (spostamenti, deformazioni, sforzi...) da cui è poi necessario estrarre un giudizio sintetico, ad es. di livello di danneggiamento, o di grado di sicurezza (espresso con appropriati indici o "fattori" di sicurezza), o infine di probabilità di collasso; e il passare dalla descrizione analitica prodotta dal modello ad E.F. a questo giudizio sintetico è operazione certamente non banale (e risolta attualmente con criteri non esenti da possibili critiche).

Introdurre in questo ambito di problemi i metodi della dinamica non lineare porrebbe in primo luogo, se non altro, a una più razionale impostazione del tipo di "domande" sul futuro della struttura che la natura non lineare del problema consente di porre (e che non sono dello stesso tipo di quelle "tecniche" per un sistema lineare, come ci siamo sforzati di mostrare succintamente).

Vediamo subito, però, un notevole ostacolo, già citato del resto all'inizio di queste note. Per strutture di tipo esteso, come lo è ad es. una diga con le sue fondazioni, un modello strutturale comporta necessariamente molti o moltissimi gdl (si faccia riferimento ancora, ad es., alla discretizzazione ad E.F.), mentre i modelli non lineari che si sanno praticamente maneggiare con gli strumenti adeguati (analisi topologica nello sdf ecc.) sono quelli a pochissimi gradi di libertà.

Sul come si possa superare razionalmente questo grave ostacolo non si è intravisto, per ora, il necessario chiarimento a livello generale. Ciò non vuol dire, peraltro, che non sia possibile sin da ora iniziare a procedere, sia pure in modo parziale e imperfetto, nella giusta direzione.

Ad es. si potrebbe provvisoriamente partire da una classica determinazione delle frequenze e corrispondenti modi propri della struttura (coi metodi dell'analisi *lineare*) e considerare in seguito ognuno dei singoli modi come un oscillatore semplice *non lineare* ad un solo gdl.

Supponendo di saper definire in modo fisicamente corretto, per ogni modo, la legge "ampiezza modale/energia" oltre il campo lineare, e di aver su tale base caratterizzato in modo sufficientemente completo (coi metodi appropriati visti sopra) il comportamento del relativo oscillatore a **1 grado di libertà** non lineare, si potrà allora definire per ogni modo l'evento critico" (in termini di frequenza, ampiezza, durata del movimento del suolo) capace di portare la struttura ad una situazione di incipiente collasso secondo un ben definito "meccanismo di rotura" associato al modo in esame. Ripetendo ciò per tutti i modi si definirebbe così una serie di "eventi critici modali". Il problema della corretta considerazione degli effetti delle non linearità verrebbe così spostato da un solo megaproblema relativo ad un sistema a moltissimi gradi di libertà (che (che non si sa trattare) a tanti problemi relativi ciascuno ad un sistema ad un solo gdl (che si sanno trattare).

A mio parere questa impostazione (alia quale lo scrivente sta lavorando in collaborazione con l'attuale Direttore del CRIS) sarebbe già un notevole progresso, in termini di economia di sforzi e di chiarezza concettuale, sulla procedura attuale. [Si noti che in questo modo si "rovescia", per così dire, l'impostazione classica: invece di definire a priori un evento critico, e cercarne gli effetti sulla struttura per giudicare se la sicurezza è messa in crisi o no, si parte dalle proprietà intrinseche - fisiche e dinamiche - della struttura per determinarne gli eventi critici, e si confrontano questi con gli eventi naturali estremi].

Per giungere ad un risultato veramente "ingegneristico" occorrerebbe peraltro dalla conoscenza di questo set di eventi critici poter trarre in ultimo un giudizio sintetico di sicurezza (o di probabilità di collasso) di fronte al tipo ed all'intensità dei massimi eventi sismici prevedibili nella zona in cui sorge la diga; e questo passo finale non è, a sua volta, facile da definire in maniera razionale (anche se vi sono ragionevoli idee per una soluzione pragmatica del problema in attesa di una sistemazione esente da critiche): tra l'altro, occorrerebbe tener conto della possibile *interazione non lineare tra i vari modi* (trasferimenti energetici da un modo all'altro tramite accoppiamenti non lineari).

Alcuni assaggi di massima dei risultati conseguibili con questo approccio, effettuati applicandolo a casi noti di dighe danneggiate da terremoti, hanno dato risultati preliminari incoraggianti; occorreranno però più estese sperimentazioni numeriche, anche in parallelo coi metodi attualmente in uso, prima di poter iniziare a prendere in considerazione un'alternativa di tal fatta.

Come si vede, il problema è apertissimo; non appare però né concettualmente lecito né praticamente opportuno accontentarsi della situazione attuale, ignorandone i punti deboli che qui sopra abbiamo tentato

di delineare (ed i rischi che, proseguendo su tale via, ci si inoltri in una strada sempre più impervia di complicazioni esponenzialmente crescenti con "ritorni" incrementali di utilità sempre più modesta e più aperta a dubbi interpretati vi).

Altri campi di interesse dell'ingegneria dell'acqua nei quali è prevedibile una penetrazione dei metodi di indagine appropriati ai sistemi non lineari sono tutti quelli coinvolgenti problemi di **moti turbolenti**, sia in pressione che a pelo libero (o, detto in altro modo, l'integrazione delle equazioni complete di Navier-Stokes). Le problematiche poste dalla non linearità nel campo della Meccanica dei Fluidi sono, del resto, da tempo emerse con chiarezza nel contesto delle *previsioni meteorologiche*, ad es. con la "scoperta" (Lorentz) dell'estrema sensibilità alle condizioni iniziali dei risultati delle previsioni a lunga scadenza (si veda lo spesso citato "*effetto farfalla*": è concepibile, al limite, che previsioni meteorologiche basate su due situazioni iniziali differenti tra loro di quantità così modeste come il battito d'ala di una farfalla nella foresta amazzonica evolvano, su tempi lunghi, verso due situazioni "finali" in una delle quali si verifichi un tifone disastroso su Tokyo, assente nell'altra).

Anche qui la consapevolezza della possibilità che si verifichino instabilità ed effetti caotici non deve indurre né a svalutare ogni sforzo di previsione né a persistere nella pretesa, alia fine futile, di complicare all'estremo i modelli o di aumentare indefinitamente la precisione dei dati: la giusta via da percorrere è quella di fare un salto di qualità nella ricerca e nell'uso di metodologie più appropriate al carattere non lineare dei fenomeni, e nella riformulazione delle "domande" a cui si pretende dare "risposta" in termini che siano correlati relativamente alla natura del modello matematico assunto a rappresentare il problema, cioè tali da consentire di ottenere risultati non incompleti o fuorvianti.

CONSIDERAZIONI FINALI

Purtroppo i limiti di un articolo di Rivista non consentono di daré altro che una paluda idea parziale di un "mondo" ormai ricchissimo di contributi appassionanti e di ricadute importanti in quasi ogni ramo della ricerca scientifica; e ciò non solo nelle scienze fisiche, ad es. in termodinamica ed in chimica, ma addirittura in biologia, nelle ricerche quantitative di economia,...

Non pochi studiosi (ad es. il premio Nobel Ilya Prigogine) traggono dagli studi sulla dinamica non lineare conseguenze "filosofiche" di vasta portata (inquadabili in una sorta di "neoristolismo"), come la rivalutazione della "storia" di fronte al determinismo, la riconciliazione delle "due culture", il ruolo "creativo" di nuovo ordine svolto in condizioni particolari dai fenomeni

caotici, nuove speculazioni sulla cosmogonia...

Se queste considerazioni sembrano fuori posto nel contesto di un modesto saggio sui problemi attuali dell'ingegneria dell'acqua, giova ricordare che l'Ingegneria in generale, ed in particolare quella dell'Acqua col suo essenziale ruolo socioeconomico, sono parte viva ed integrante della cultura contemporanea, e partecipano necessariamente, come soggetto sia attivo che passivo, all'evoluzione della visione concettuale del mondo e degli strumenti qualitativi e quantitativi di conoscenza.

L'epoca attuale è certamente ricca di fermenti di estremo interesse, è l'Ingegnere è pienamente consapevole delle implicazioni e delle sfide che i problemi del futuro ci vanno proponendo.

I concetti e gli strumenti di analisi della dinamica non lineare saranno parte non secondaria del bagaglio culturale che consentirà di far fronte a queste sfide in maniera adeguata ed efficace.

LISTA BIBLIOGRAFICA

Allen, P.M; Sanglier, M (1978): Dynamic models of urban growth / *Social Biol. Stmct.*

Cenedese, A., Paolucci, F., Romano, G.P. (1990) Transizione al caos di un fluido contenuto in un serbatoio oscillante: valutazione delle dimensioni dell'attrattore Atti del X Congresso

Nazionale dell'AIMETA, Pisa, ott.

Einaudi, G (1988) Entre le Temps et l'Eternité Ed. Fayard.

Fanelli, M. (1990): *La dinamica dei sistemi non lineari* Rapporto interno CRIS/ENEL n° 3959.

Fanelli, M. (1992), S. Sello : *Complex and chaotic response of a nonlinear oscillator with an isothermal gas spring*, Meccanica

Gleick, J (1988) Chaos. Penguin Books

Heo-bai-lin (1984): Chaos. World Scientific Publications

Maier, G., Perego, U: (1990) Effects of softening in elastic plastic structural dynamics , Symp. on Struct. Failure , Stuttgart, Aug.

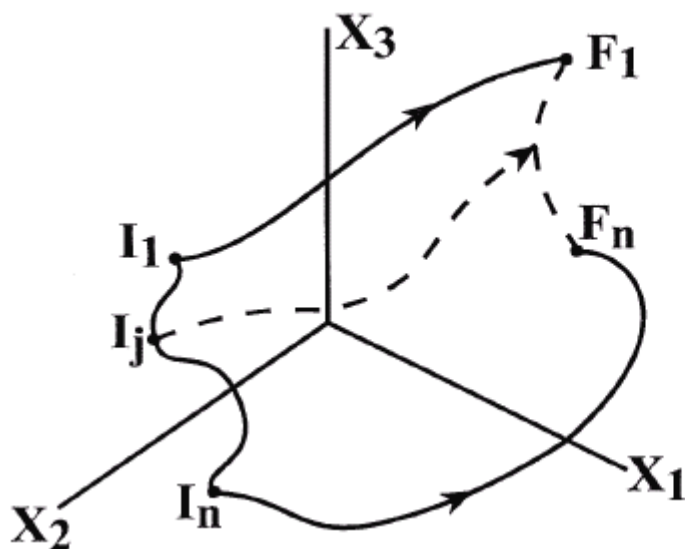
Paidoussis, M.P., G.X. Li, F.C. (1989) *Moon: Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid*, Journ. of Sound & Vibration

Prigogine, I., (1986) La Nouvelle Alliance , Ed.

Gallimard, De l'Etre au Devenir (Ed.italiana). Smereka, P. (Dec. 1988), Banerjee, S.: *The dynamics of*

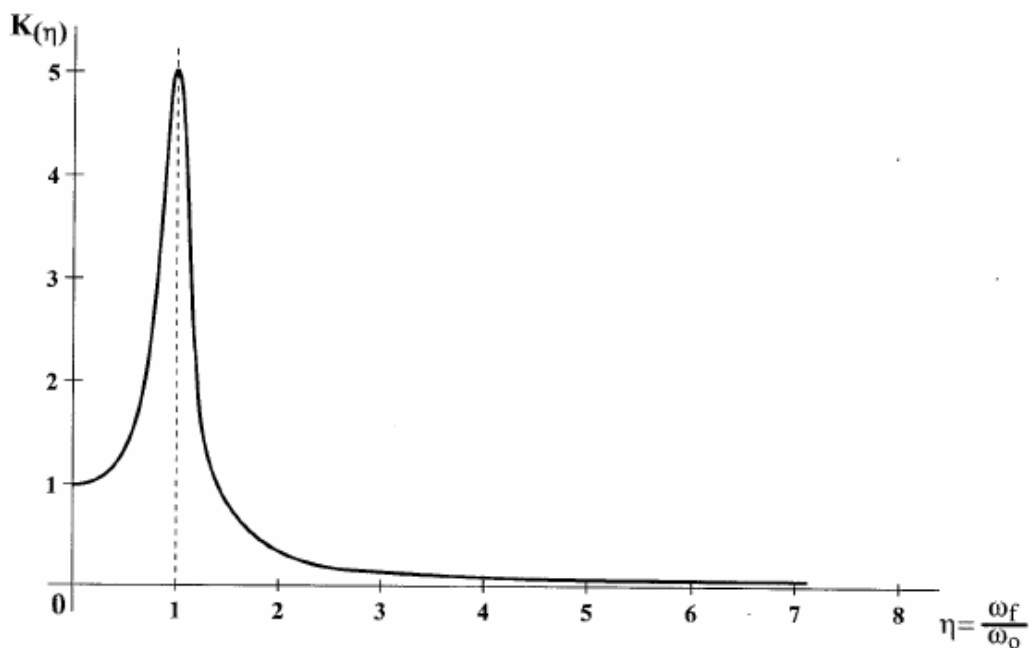
periodically driven bubble clouds, Phys. of Fluids.

Thompson, J.M, Stewart H.B. (1989) Non-Linear Dynamics and Chaos. J.Wiley & Son

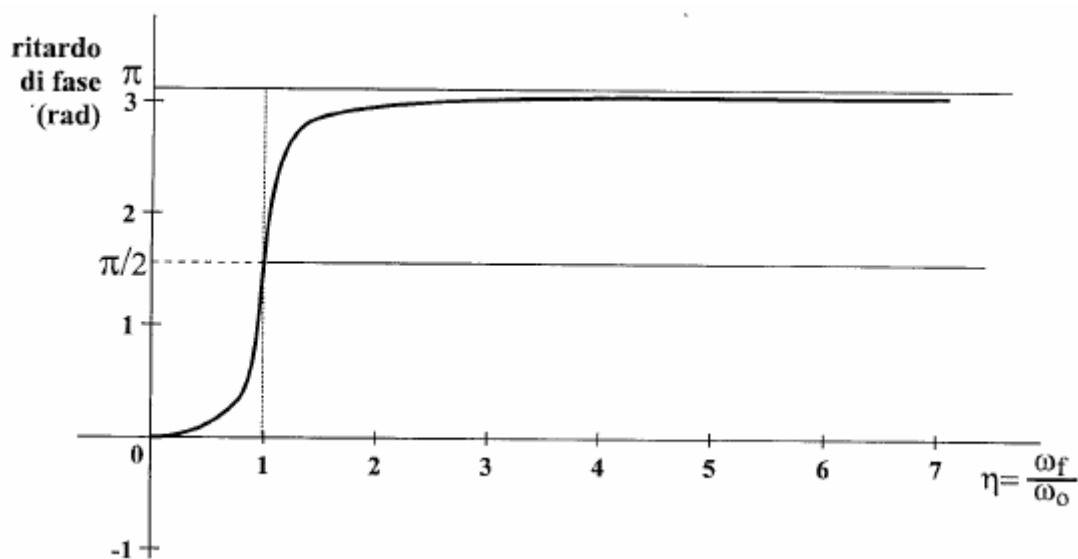


I_j = stati iniziali ($t=0$)
 F_j = stati finali ($t=t_f > 0$)
 X_k = variabili di stato

Figura 1. "Principio di continuità" in termini topologici



a) Rapporto K tra ampiezza di risposta dinámica e risposta statica



b) Ritardo di fase della risposta rispetto alia forzante

Figura 2. Curve di risposta in frequenza dell'oscillatore lineare (smorzam. $\zeta = 0,1$):

a) Rapporto K tra ampiezza di risposta dinámica e risposta statica

b) Ritardo di fase della risposta rispetto alla forzante

EQ. ADIMENS.

EQUAZIONE DEL MOTO

$$\ddot{Y} + \frac{2\xi}{\eta} \dot{Y} + \frac{Y}{\eta^2} = f_r \frac{\sin \tau}{\eta^2}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_r \sin \omega_f t = F(t)$$

$$Y = \frac{x}{x_0}$$

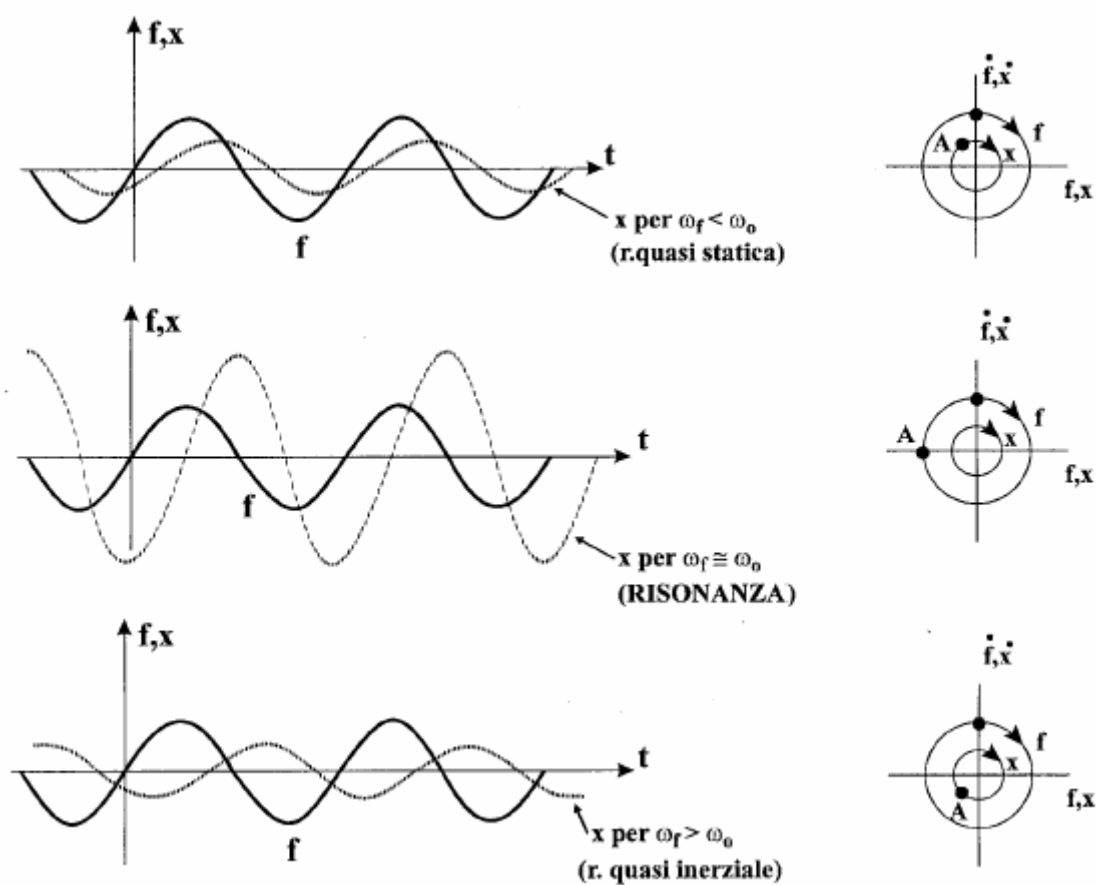
$$\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f_r = \frac{F_r}{kx_0}$$

$$\eta = \frac{\omega_f}{\omega_0}$$

$$\tau = \omega_f t$$

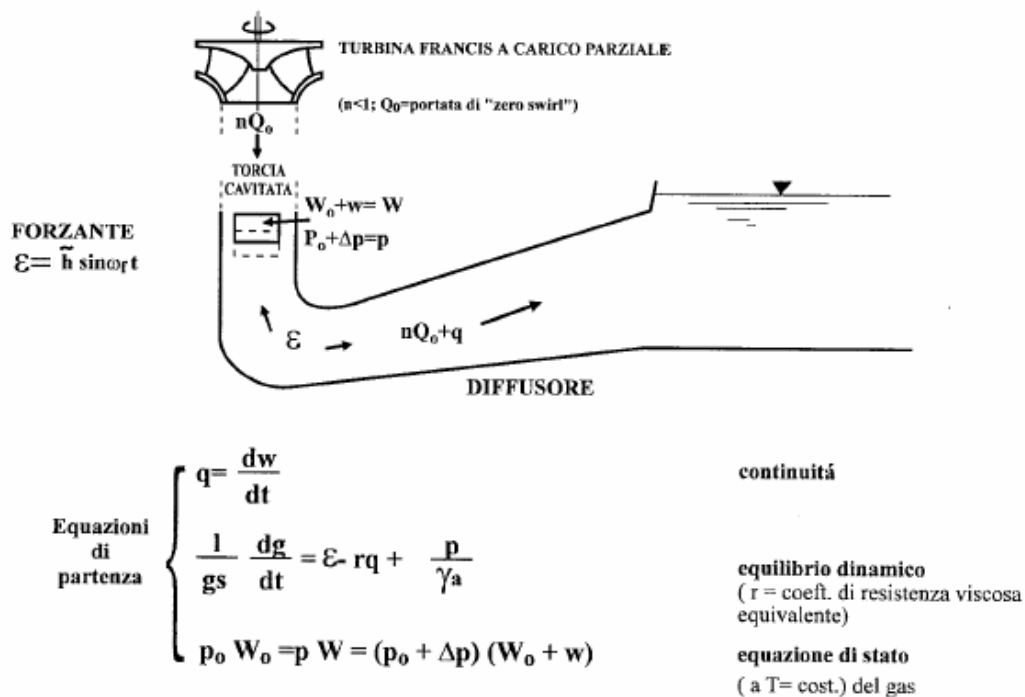


RISPOSTE A REGIME nel
dominio del tempo

RISPOSTE A REGIME nel
Piano delle fasi

A=attrattore della risposta
a regime.

Figura 2b. Sistema lineare



Dopo vari sviluppi e adimensionalizzazione si ottiene

$$(\dot{Y} = \frac{dY}{d\tau}, \ddot{Y} = \frac{d^2Y}{d\tau^2}, \tau = \omega_f t):$$

equazione
non lineare

$$\ddot{Y} + \frac{2\xi\dot{Y}}{\eta} + \frac{Y}{\eta^2(1+Y)} = f_r \frac{\sin \tau}{\eta^2}$$

dove:

$$Y = \frac{W}{W_0} - 1 = \frac{w}{W_0} ;$$

$\xi = \text{smorzamento (in frazione dello s. critico)} ;$

$\eta = \omega_f / \omega_0$ ($\omega_0 = \text{pulsazione propria del sistema linearizz.}$) ;

$f_r = \text{parametro di ampiezza della forzante}$

(l'equazione linearizzata e, sotto la condizione $Y \ll 1$ ossia $w/W_0 \ll 1$:

$$\ddot{Y} + \frac{2\xi\dot{Y}}{\eta} + \frac{Y}{\eta^2} = f_r \frac{\sin \tau}{\eta^2})$$

Figura 3. "Draft tube surge": Modello non lineare

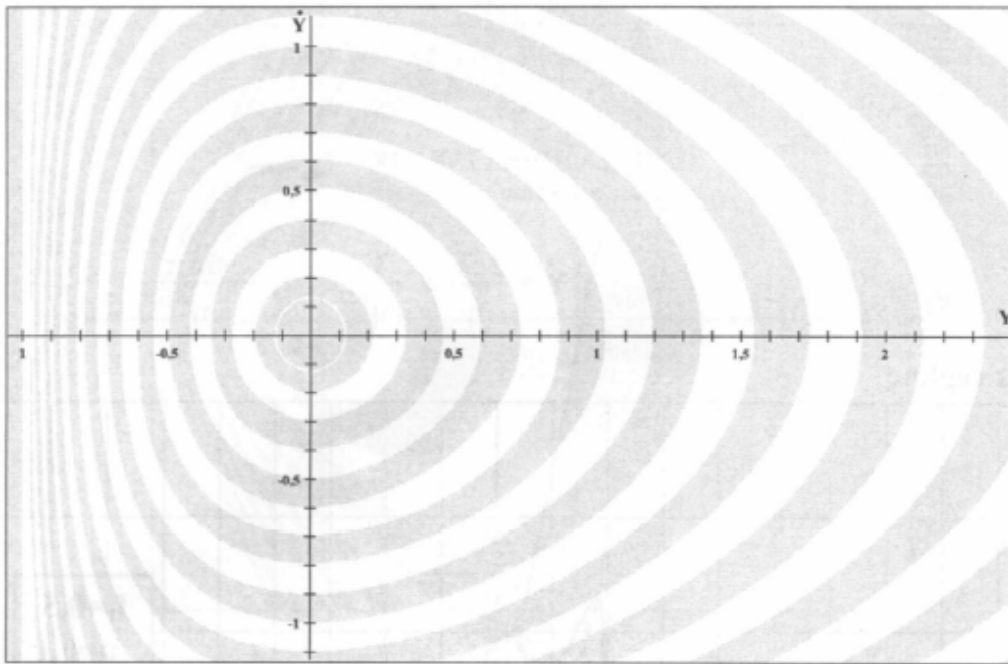


Fig. 4. Orbite (Y, \dot{Y}) nel piano delle fasi per vibrazioni libere non smorzate ($f_r = 0$, $\zeta = 0$) dell'oscillatore non lineare (12)

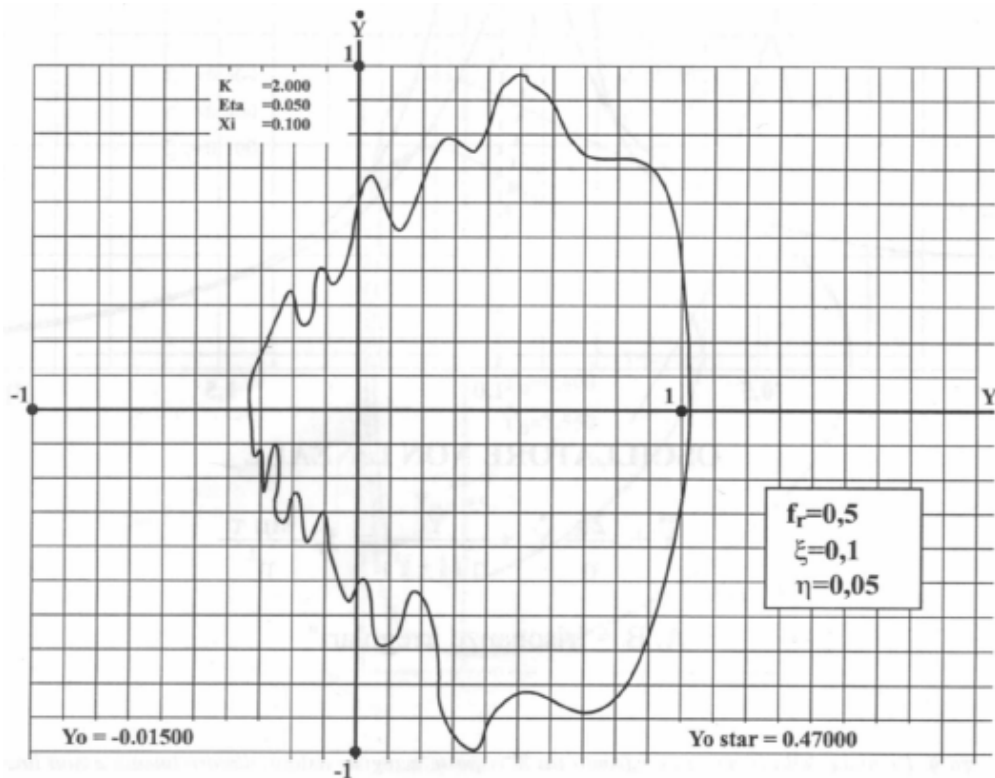
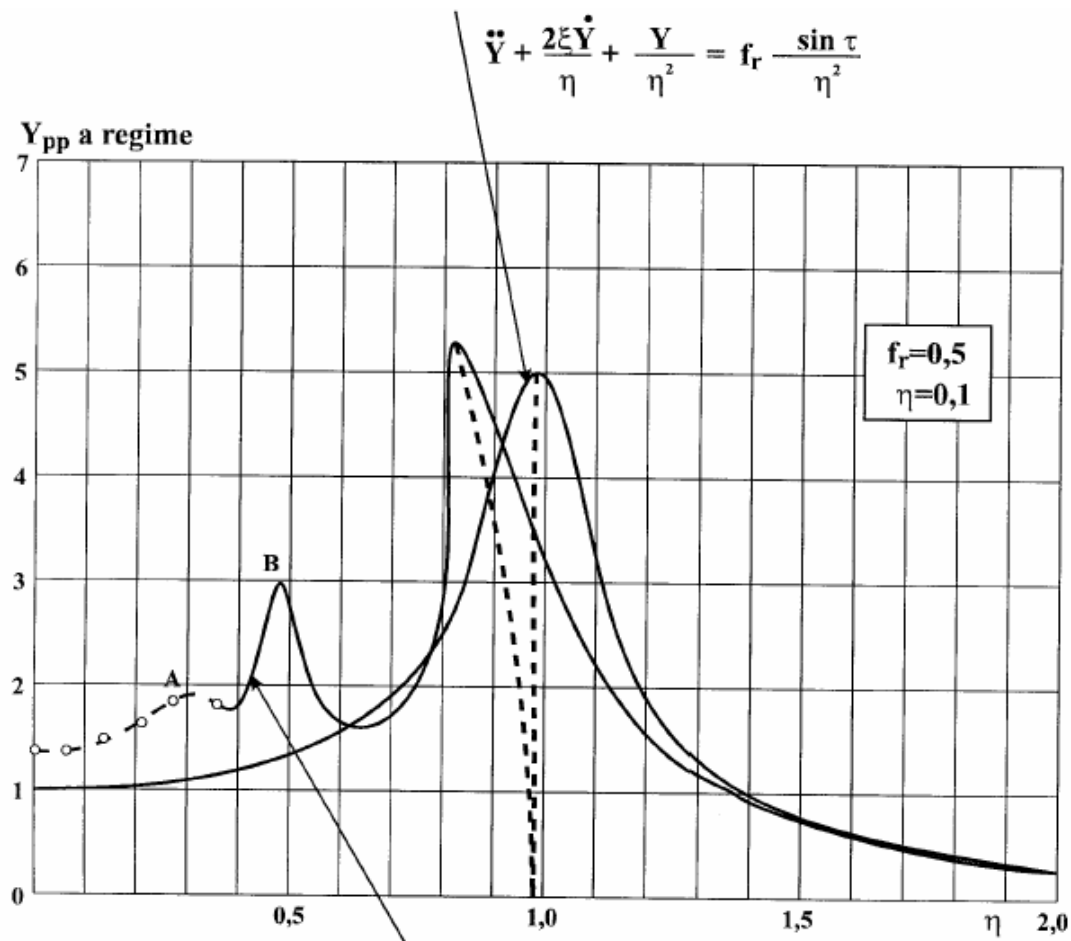


Figura 5. Oscillazioni secondarie per $\eta \ll 1$

OSCILLATORE LINEARE

risposte a regime



OSCILLATORE NON LINEALE

$$\ddot{Y} + \frac{2\xi}{\eta} \dot{Y} + \frac{Y}{\eta^2(1+Y)} = f_r \frac{\sin \tau}{\eta^2}$$

A, B = “risonanze irregolari”

Figura 6. Dominio della frequenza confronto tra le risposte a regime dell'oscillatore lineare e non lineare

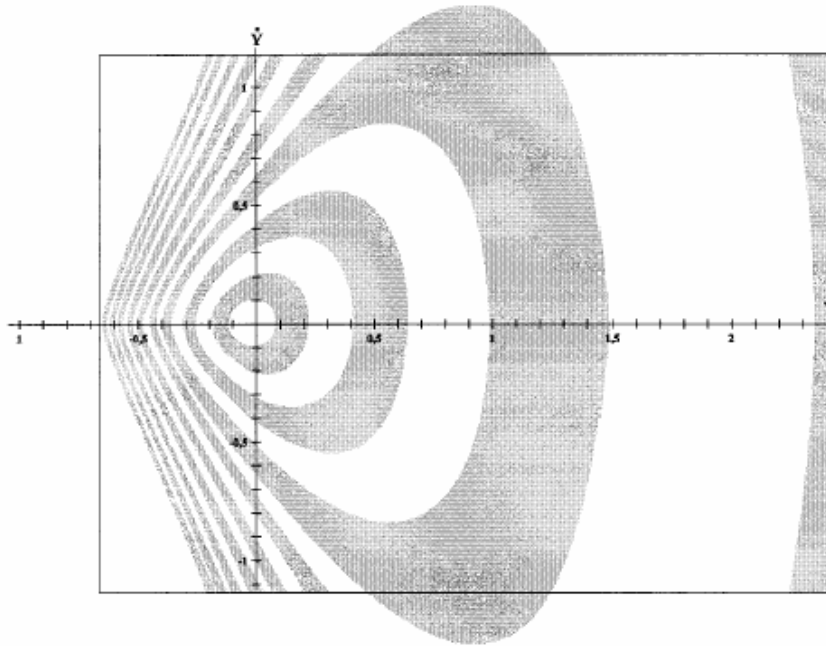


Figura 7. Orbite (Y, \dot{Y}) nell piano delle fasi per vibrazioni forzate quasi-statiche ($\eta \rightarrow 0$). Curve per valori crescenti di f_r con $\Delta f_r = 0.1$ (l'orbita più piccola, quasi circolare, corrisponde a $f_r = 0.1$)

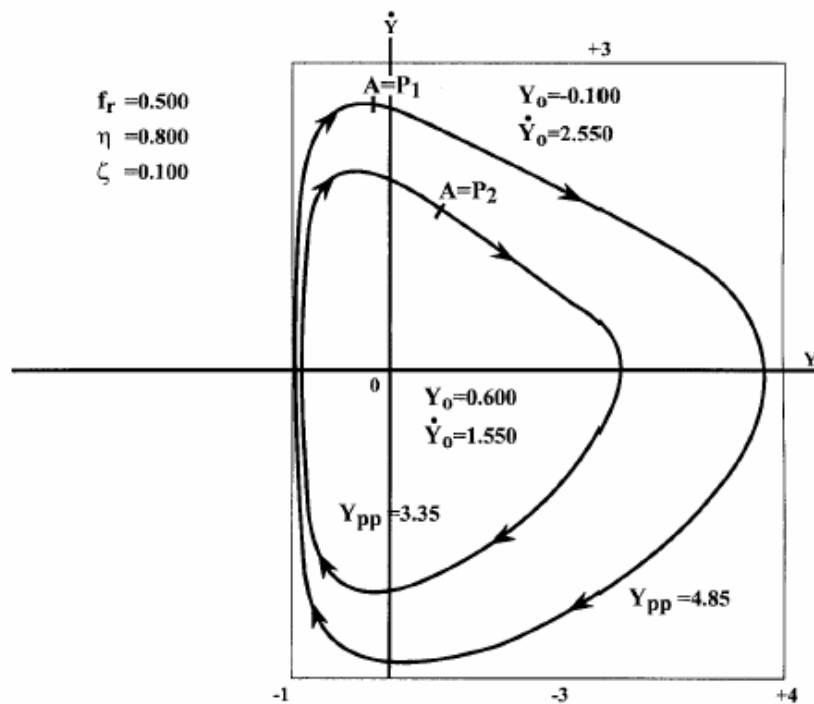


Figura 8. Due distinti regimi stabili di oscillazione per una stessa eccitazione (stessa ampiezza, stessa frequenza) a seconda delle condizioni iniziali $\{Y_0, \dot{Y}_0\}$

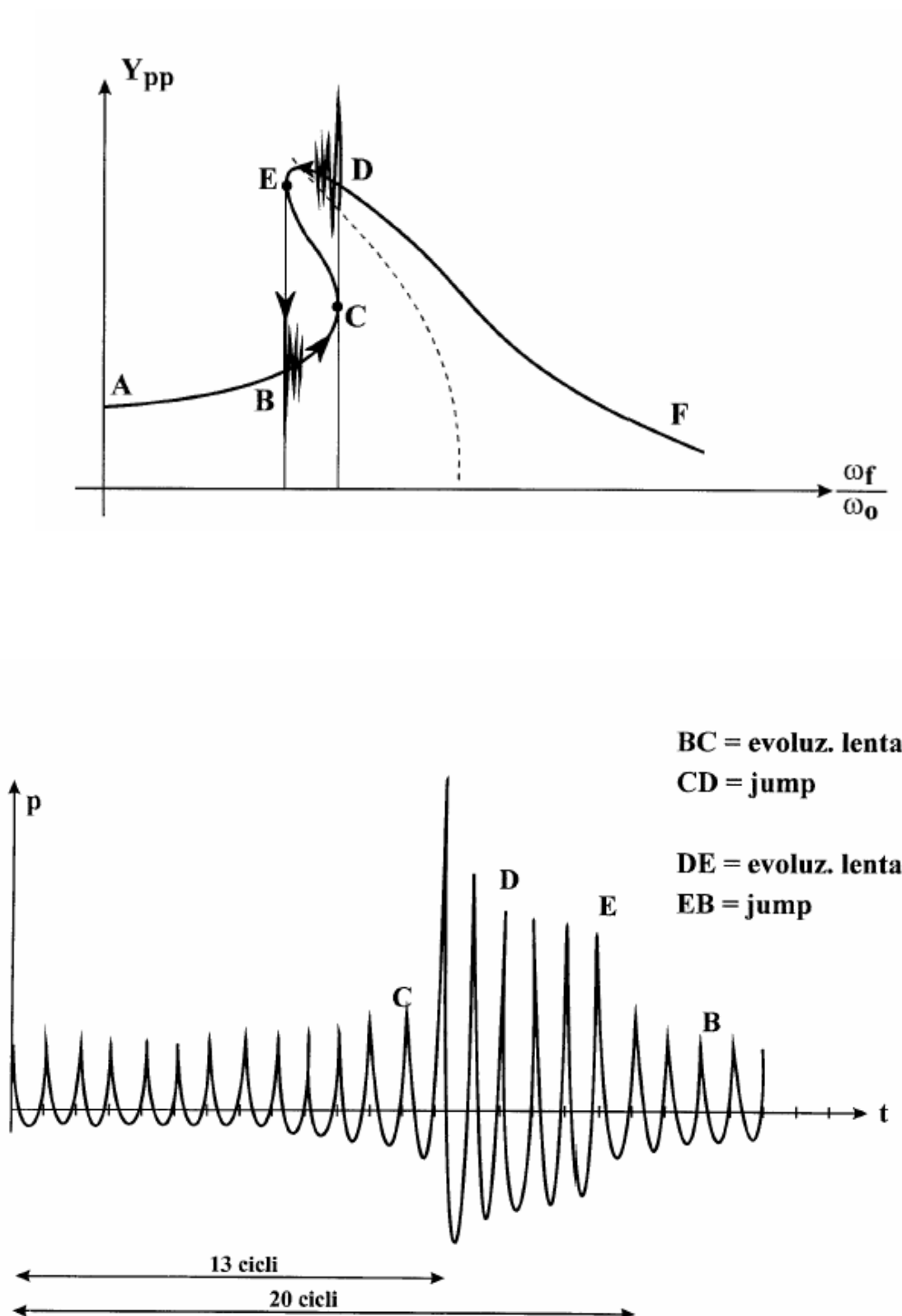


Figura 9. Isteresi dinamica per un oscillatore non lineare

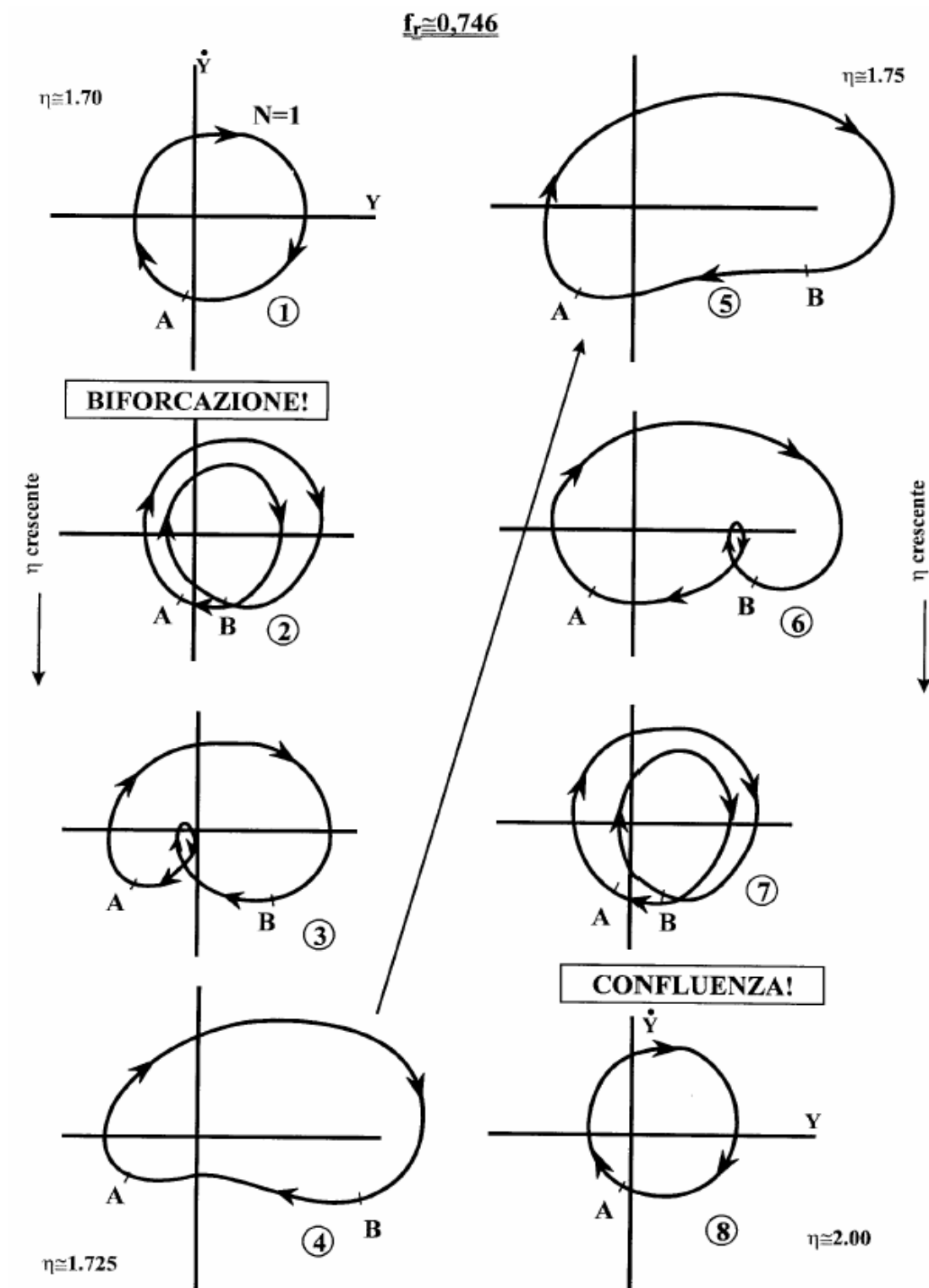
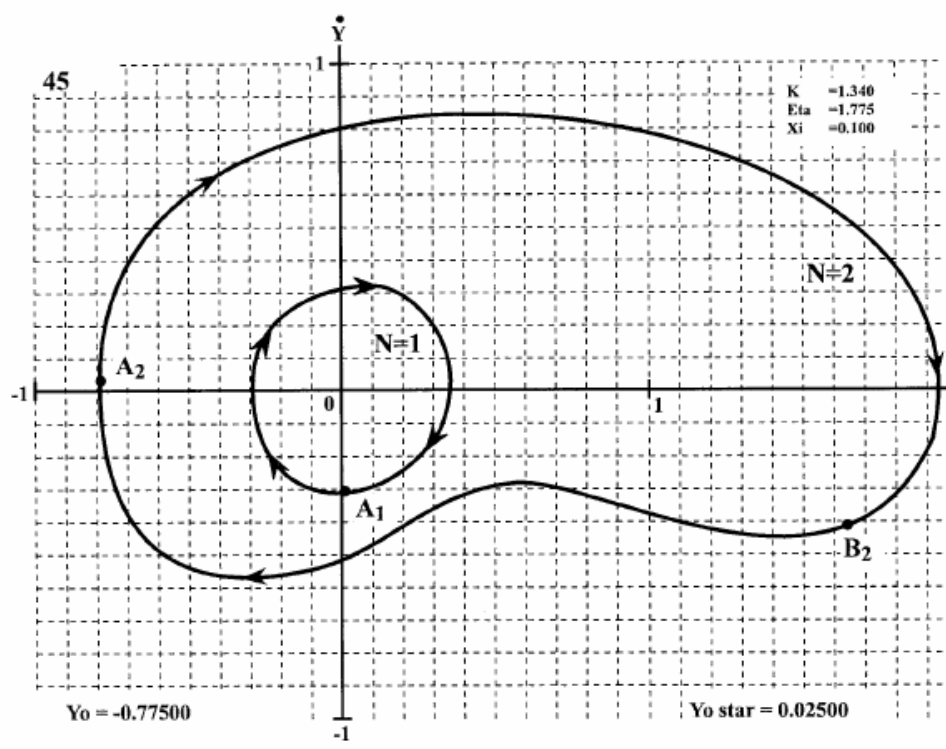
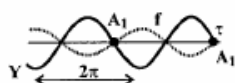
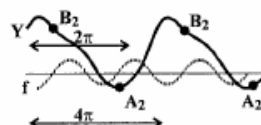


Figura 10. Subarmoniche attorno a $\eta = 2$


$$Y_{pp} \cong 0,62 \text{ per } N=1 \quad \begin{cases} Y_o = 0,01 \\ \dot{Y}_o = -0,32 \end{cases}$$
forma d'onda
$$Y_{pp} \cong 2,74 \text{ per } N=2 \quad \begin{cases} Y_o = -0,775 \\ \dot{Y}_o = 0,025 \end{cases}$$
forma d'onda

regime N = 2 subarmonico di ordine 2 in competizione con il regime N = 1 quasi-lineare per gli stessi valori dei parametri di controllo

$f_r=0,746$ $\eta=1.775$ $\xi=0,1$

Quali sonó i bacini di attrazione dei due tipi di regime (nel piano delle fasi, per i valori assegnati dei p.d.c.) ?



esplorazione sistematica nel piano Y_0 , $Y_0 \rightarrow$ ideale per il calcolo parallelo.

Figura 11.

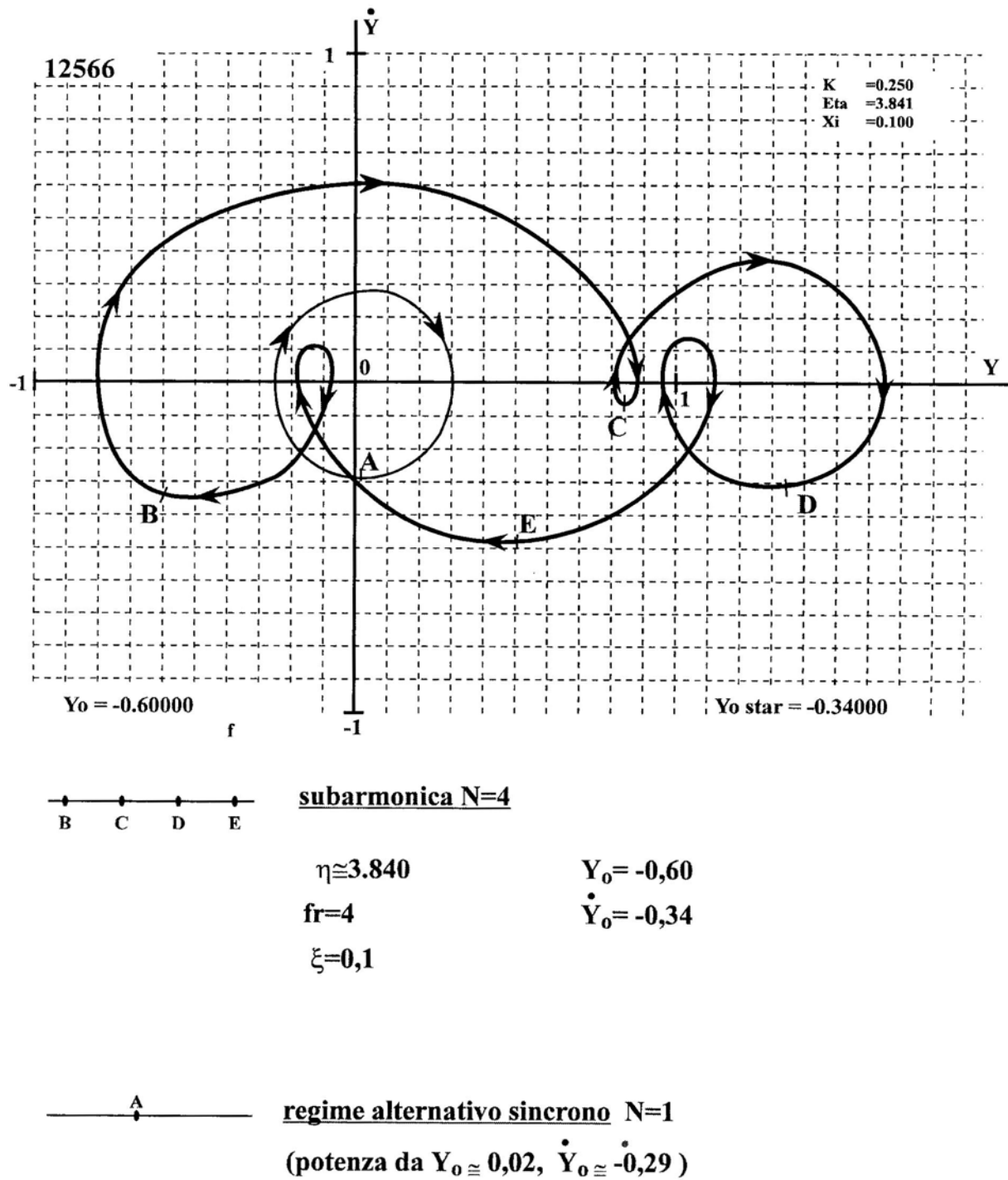


Figura 12.

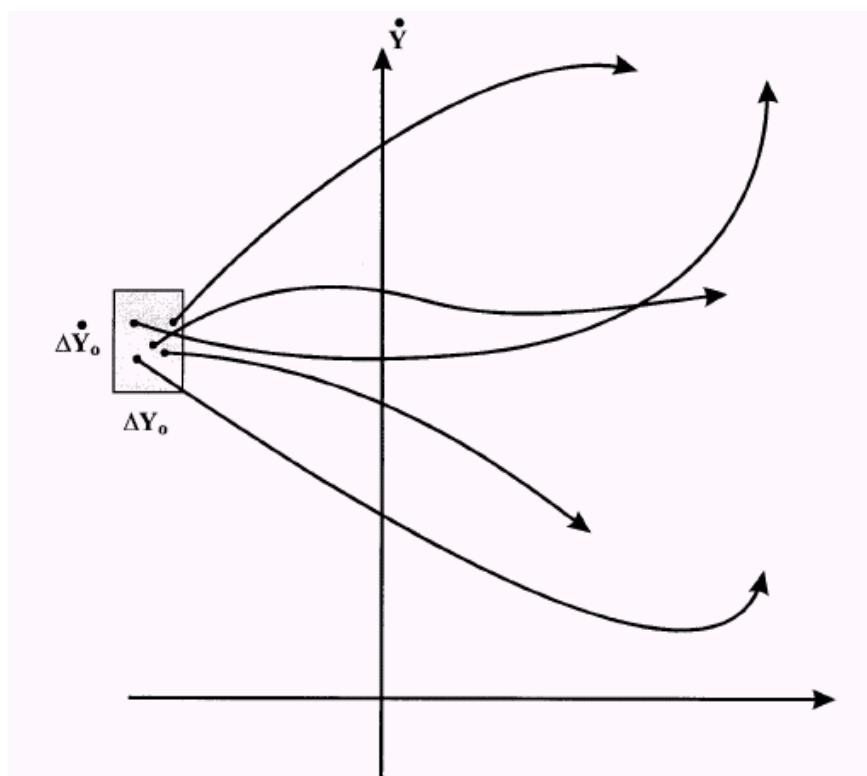


Figura 13. Traiettorie divergenti nel piano delle fasi: stati iniziali vicini possono daré origine a stati finali molto distanti tra loro. ΔY_0 , $\Delta \dot{Y}_0$ = incertezza sulle condizioni iniziali

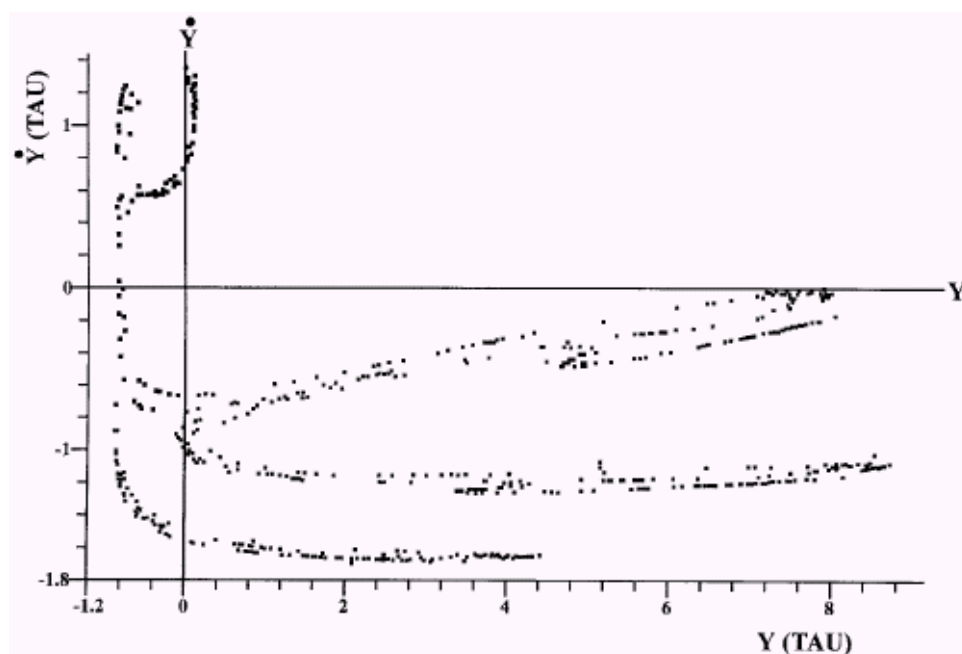


Figura 14. Campionamento dell'attrattore strano dell'eq. (12) per $\eta = 2.40$; $f_r = 4$; $Y_0 = 0.84$; $\dot{Y}_0 = 1.26$